Давлатов Ш.О.

Каршинский инженерно-экономический институт

Узбекистан, г.Карши

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ Т-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОДНОСВЯЗНОЙ ДВУХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ.

Аннотация. В этой статье исследована смешанная задача для симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами. В ней обоснована схема конечных элементов в случае равномерной сетки. Разработана программа расчета численного решения.

Ключевые слова: метод конечных элементов, алгоритм,смешанная задача, гиперболическая система, базисные функции, неявно-разностная схема.

Davlatov Sh.O.

Karshi Engineering and Economic Institute

Uzbekistan, Karshi

Abstract.In this paper we consider the mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients. For the mixed problem we study the question justification scheme of finite elements in the case of a uniform grid. The results of numerical calculation of the model problem are given.

Keywords: finite element method,algorithm,mixed problem, hyperbolic system, basic functions, implicit difference scheme.

Постановка смешанной задачи ([1]):

Постановка смешанной задачи для двумерных симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В области $G = \{(t,x,y): t \in (0,T),\ (x,y) \in \Omega\}$ найти вектор-функцию u, удовлетворяющую системе

$$A\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + C\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} + Du(x,y,t) = F(x,y,t) \quad (1)$$

с граничными

$$\begin{aligned} &R_1 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{x+}} = g_1(t,x,y),\ R_2 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{x-}} = g_2(t,x,y),\\ &R_3 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{y+}} = g_3(t,x,y),\ R_4 u(t,x,y)\big|_{\partial\Omega_{y-}} = g_4(t,x,y), \end{aligned} \quad (2)$$

и начальным

$$u(0,x,y) = u_0(x,y),\ \ (x;y) \in \Omega \ ; \quad (3)$$

условиями. Здесь $A,B,C-$ действительные постоянные симметричные матрицы размерности $N \times N$, причем A - положительно определенная; $D-$ произвольная действительная постоянная матрица размера $N \times N$; R_1,R_2,R_3,R_4- постоянные матрицы, количество столбцов которых равно N, а количества строк матриц R_1,R_2 равны количеству положительных и отрицателных собственных значений матрицы $A^{-1}B$ соответственно, а количества строк матриц R_3,R_4 равны количеству положительных и отрицателных собственных значений матрицы $A^{-1}C$ соответственно; g_1,g_2,g_3,g_4-заданные вектор-функции, согласованные с размерностью матриц R_1,R_2,R_3,R_4 соответственно; $\partial\Omega_{x+},\partial\Omega_{x-}$ - части границы $\partial\Omega$, где ставятся условия, соответствующие положительным и отрицательным собственным значениям матрицы $A^{-1}B$ соответственно, а $\partial\Omega_{y+},\partial\Omega_{y-}$ - части границы $\partial\Omega$, где ставятся условия, соответствующие положительным и отрицательным собственным значениям матрицы $A^{-1}C$ соответственно; $u_0(x,y)-$ заданная вектор-функция; $u(t,x,y) = (u_1,u_2,...,u_M)^T -$ неизвестная, а $F(t,x,y) = (f_1,f_2,...,f_M)^T -$ заданная вектор-функция.

Ω - Аппроксимация области.

Двумерная ограниченная область аппроксимирована следующим образом. При описании границы области в качестве составляющих ее частей могут использоваться отрезки прямых и дуги окружностей. Началом некоторой части границы S считается та ее концевая точка, при движении из которой по S область остается слева. Отрезки прямых определяются двумя точками – концами, а для дуг окружностей дополнительно задается точка центра окружности.

Область Ω заключим в наименьший прямоугольник со сторонами, паралельными осям Ox и Oy: $\Omega \subset [a;b] \times [c;d]$. Проведем прямые $x = x_i = a + h_x i$ $(i = 0, \ldots, N_x, h_x = \dfrac{b-a}{N_x})$, $y = y_j = c + h_y j$ $(j = 0, \ldots, N_y, h_y = \dfrac{d-c}{N_y})$ пересекающие отрезки, соответсвенно, $[a;b], [c;d]$. В результате область Ω покроется равномерной сеткой (рис.1).

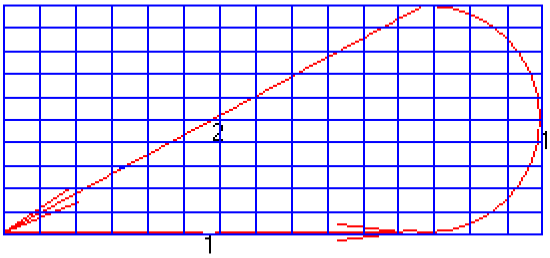

Рис.1.

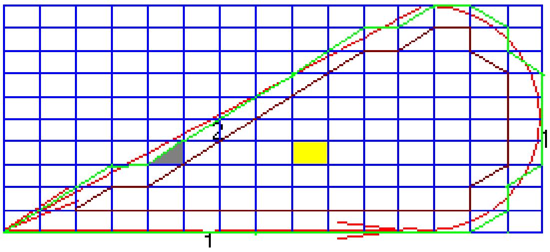

Рис.2.

Точку пересечения прямых $x = x_i = a + h_x i$ и $y = y_j = c + h_y j$, называемую узлом сетки, обозначим через $M_{ij} = M(x_i; y_j)$.

1-определение. Узел, находящийся на расстояние $h \le \dfrac{h_x}{2}$ или $h \le \dfrac{h_y}{2}$ от $\partial\Omega$, или лежающий на $\partial\Omega$ называется граничным узлом.

На рисунке 2 граничные узлы соединены линией зеленого цвета.

2-определение. Узел, лежащий внутри области Ω и являющийся соседным узлом граничного узла, называется околограничным узлом.

На рисунке 2 околограничные узлы соединены линией коричневого цвета.

3-определение. Узел, лежащий внутри области Ω и не являющийся соседным узлом граничного узла, называется внутренным узлом.

4-определение. Узел, не лежащий внутри области Ω и не являющийся граничным узлом, называется внешным узлом.

Сетка разбивает область Ω_h на части (элементы). Каждый элемент является прямоугольником (на рис.2. желтого цвета) или треугольником (на рис.2. серого цвета). Элемент обозначим через K. Элементы, одной из вершин которых является узел M_{ij}, называются элементами этого узла. Объединение этих узлов обозначим через Ω_{ij}. Тогда справедливо равенство $\Omega_h = \bigcup_{M_{ij} \in \Omega} \Omega_{ij}$.

Построение неявной разностной схемы для задачи (1)-(3)

Построим неявную разностную схему для системы (1).

Отрезок $[0, T]$ разобъем на N_t частей:

$$t_n = \tau \cdot n, (n = 0, \dots, N_t), \tau = \frac{T}{N_t}.$$

Будем искать приближенное решение смешанный задачи (1)-(3) на каждом слое t_n по времени в виде $u_h^n = u_h(t_n, x, y) = \sum_{(x_i; y_j) \in \overline{\Omega}_h} u_{ij}^n Q_{ij}(x, y)$. Здесь $Q_{ij}(x, y)$ базисные функции, в узле $M(x_i, y_j)$ значение $Q_{ij}(x, y)$ равно 1, а в остальных узлах - 0,

$$u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n) = \left(u_{1ij}(t_n), u_{2ij}(t_n), \dots, u_{Nij}(t_n)\right)^T = \left(u_{1ij}^n, u_{2ij}^n, \dots, u_{Nij}^n\right)^T.$$

Аппроксимируем систему (19) в узле M_{ij} т.е. в системе (1) производную по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимируем отношением $\frac{u(t+\tau, x, y) - u(t, x, y)}{\tau}$, вместо $u(t, x, y)$ подставим $u_h(t_n, x, y)$, каждое уравнение полученной системы умножим на $Q_{ij}(x, y)$ и проинтегрируем по Ω_{ij} .Здесь Ω_{ij} - объединение всех элементов узла M_{ij}. В итоге получим неявную разностную схему:

$$\begin{gathered}
\left(\alpha_{ij}(A+\tau D) + \beta_{ij}\tau B + \gamma_{ij}\tau C\right)u_{ij}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{i+1j}(A+\tau D) + \beta_{i+1j}\tau B + \gamma_{i+1j}\tau C\right)u_{i+1j}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{i+1j+1}(A+\tau D) + \beta_{i+1j+1}\tau B + \gamma_{i+1j+1}\tau C\right)u_{i+1j+1}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{ij+1}(A+\tau D) + \beta_{ij+1}\tau B + \gamma_{ij+1}\tau C\right)u_{ij+1}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{i-1j+1}(A+\tau D) + \beta_{i-1j+1}\tau B + \gamma_{i-1j+1}\tau C\right)u_{i-1j+1}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{i-1j}(A+\tau D) + \beta_{i-1j}\tau B + \gamma_{i-1j}\tau C\right)u_{i-1j}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{i-1j-1}(A+\tau D) + \beta_{i-1j-1}\tau B + \gamma_{i-1j-1}\tau C\right)u_{i-1j-1}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{ij-1}(A+\tau D) + \beta_{ij-1}\tau B + \gamma_{ij-1}\tau C\right)u_{ij-1}^{n+1} + \\
\left(\alpha_{i+1j-1}(A+\tau D) + \beta_{i+1j-1}\tau B + \gamma_{i+1j-1}\tau C\right)u_{i+1j-1}^{n+1} = \\
\tau q_{ij}F_{ij}^{n+1} + \tau A(\alpha_{ij}u_{ij}^n + \alpha_{i+1j}u_{i+1j}^n + \alpha_{i+1j+1}u_{i+1j+1}^n + \\
\alpha_{ij+1}u_{ij+1}^n + \alpha_{i-1j+1}u_{i-1j+1}^n + \alpha_{i-1j}u_{i-1j}^n + \alpha_{i-1j-1}u_{i-1j-1}^n + \\
\alpha_{ij-1}u_{ij-1}^n + \alpha_{i+1j-1}u_{i+1j-1}^n) \quad (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_h .
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь

$$\alpha_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}} Q_{ij}^2(x,y)dxdy,\quad \beta_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial x}Q_{ij}(x,y)dxdy,$$

$$\gamma_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}}\frac{\partial Q_{ij}(x,y)}{\partial y}Q_{ij}(x,y)dxdy,\quad q_{ij}=\int\limits_{\Omega_{ij}} Q_{ij}(x,y)dxdy.$$

Граничных и начальных условий аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
&R_1u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx+}}=g_1\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),\ M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx+};\\
&R_2u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hx-}}=g_2\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hx-};\\
&R_3u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy+}}=g_3\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy+};\\
&R_4u\left(t_{n+1},x_i,y_j\right)\Big|_{\partial\Omega_{hy-}}=g_4\left(t_{n+1},x_i,y_j\right),M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_{hy-};
\end{aligned}\tag{5}$$

при $t=0$:

$$u\left(0,x_i,y_j\right)=u_0\left(x_i,y_j\right),\quad M(x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h.\tag{6}$$

В качестве базисной функции возьмем функции $Q_{ij}(x,y)=\varphi_i(x)\psi_j(y)$, где

$$\varphi_i\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_x}, & x\in\left(x_{i-1},x_i\right);\\[2mm] \dfrac{x_{i+1}-x}{h_x}, & x\in\left(x_i,x_{i+1}\right);\qquad i=1,\dots,N_x-1\\[2mm] 0, & x\notin\left(x_{i-1},x_{i+1}\right);\end{cases}\tag{7}$$

$$\varphi_0\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h_x}, & x\in\left(x_0,x_1\right);\\[2mm] 0, & x\notin\left(x_0,x_1\right);\end{cases}\qquad \varphi_{N_x}\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N_x-1}}{h_x}, & x\in\left(x_{N_x-1},x_{N_x}\right);\\[2mm] 0, & x\notin\left(x_{N_x-1},x_{N_x}\right);\end{cases}$$

$$\psi_j\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j-1}}{h_y}, & y\in\left(y_{j-1},y_j\right);\\[2mm] \dfrac{y_{j+1}-y}{h_y}, & y\in\left(y_j,y_{j+1}\right);\qquad j=1,\dots,N_y-1\\[2mm] 0, & y\notin\left(y_{j-1},y_{j+1}\right);\end{cases}\tag{8}$$

$$\psi_0\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{y_1-y}{h_y}, & y\in\left(y_0,y_1\right);\\[2mm] 0, & y\notin\left(y_0,y_1\right);\end{cases}\qquad \psi_{N_y}\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{N_y-1}}{h_y}, & y\in\left(y_{N_y-1},y_{N_y}\right);\\[2mm] 0, & y\notin\left(y_{N_y-1},y_{N_y}\right);\end{cases}$$

Считая, что найдено приближенное решение смешанный задачи до $t_n\,(n=0,1,2,...)$ слоя включительно, для нахождения приближенного решения смешанной задачи на слое t_{n+1} объединим систему разностных уравнений (4) каждого узла $M_{ij}=M(x_i;y_j)\in\partial\Omega_h$ и граничные условия (5) каждого граничного узла $M(x_i,y_j)\in\partial\Omega_h$. В итоге получим систему линейных уравнений относительно компонентов векторов u_{ij}^{n+1}. Для того чтобы эта система линейных уравнений была замкнута, на граничнах узлах $M_{ij}=M(x_i;y_j)\in\partial\Omega_h$, для компонентов решения $u(x,y,t)$, для которых не поставлены граничные условия, возмем соответсвующие разностные уравнения из системы (4). В итоге получим замкнутую систему линейных уравнений. Решив эту систему методом главных элементов, получим численное решение задачи (1)-(3).

Следующая теорема, показывающая условную устойчивость разностной схемы, полученной методом конечных элементов для смешанной задачи (1)-(3).

Теорема. *При выполнении условий*

$$\int_{\partial\Omega} Su\cdot uds\geq 0,\qquad \left(\left(D+D^T\right)u,u\right)\geq 0 \tag{9}$$

разностная задача (4)-(6) имеет единственное решение u_h *, причём при любых* h_x,h_y *и при всех* $n\leq\dfrac{T}{\tau}$ *выполняется неравенство*

$$\left\|u_h^n\right\|_{L_2(\Omega)}^2\leq e^T\left\|u_0\right\|_{L_2(\Omega)}^2+(T+1)(e^T-1)F.$$

Здесь $\|u\|_{L_2(\Omega)}=\sqrt{\int_\Omega u\cdot udxdy}$, $F=\max\limits_n\left\|F^n\right\|_{L_2(\Omega)}^2$, $S=n_xB+n_yC$, $n=(n_x,n_y)-$ *внешняя нормаль к* $\partial\Omega$.

На основе этих схем создана программа, решающая численно задачу (1)-(3) и рисующая график решения. При этом в случае не выполнения условий устойчивости (9) программа информирует об этом. Созданная программа проверена на основе вычислительных экспериментов в модельных задачах.

Пример:

Дано система

$\Omega=\{(x,y):0<x<2,0<y<2\}$ да

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+u_1=xy-yt+xt+xyt\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x}-\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+u_2=(x+y)(1+t)\end{cases}$$

граничными условиями

$x=0$ да $u_2=yu_1+yt$;

$x=2$ да $u_1=-yu_2+(y^2+4y)t$;

$y=0$ да $u_1=u_2-xt$;

$y=2$ да $u_2=-2xu_1+(4x^2+x+2)t$;

и начальными данными

$$t=0: \quad \begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{matrix}$$

Найти численное решение $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ системе удовлетворяющей граничных и начальных условий методом конечных элементов.

Точные решения системе следующие:

$u_1 = xyt$

$u_2 = (x+y)t$

Если количество разбиений по времени $n_t = 5$, количества разбиений по x и y соответственно равны $n_x = 20, n_y = 20$,то тогда разность между точным и приближенным решением во время $t = 10$ равно $\|u - v\| = 0{,}0823485$.Где $u(x,y,t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ точное решение, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ приближенное решение.

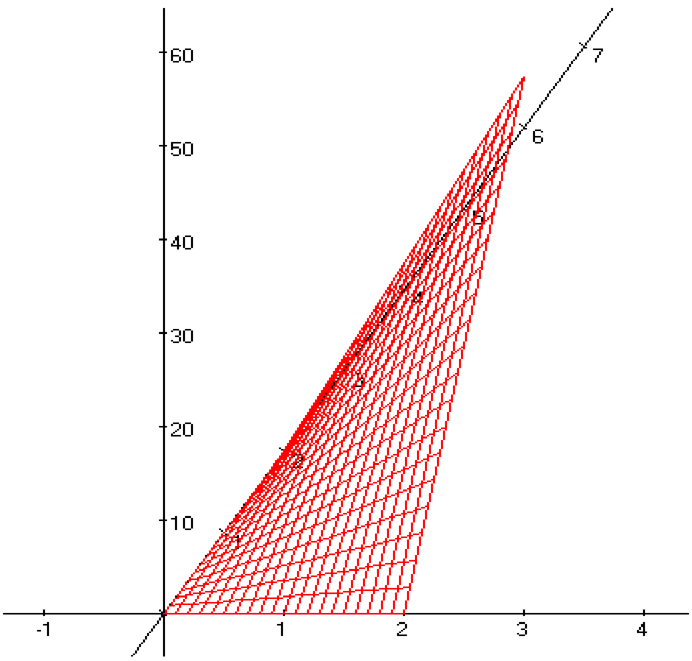

Рис. 3. График v_1.

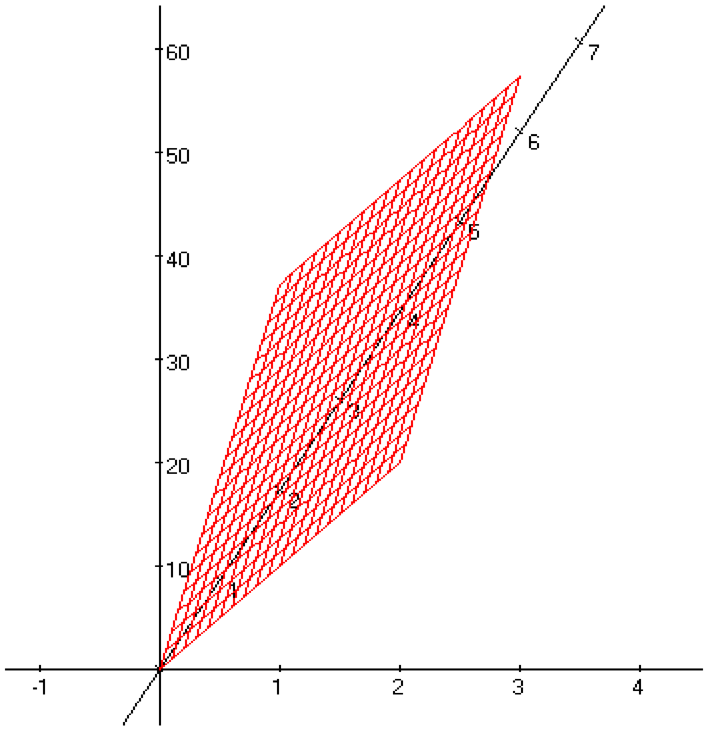

Рис. 4. График v_2.

Литературы:

1.Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.:Наука,1979,372с.

2.С.К.Годунов, А.В.Забродин и др.Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.:Наука,1976. 75с.

3.Марчук Р.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы.- М.:Наука,1981.416 с.

4. Applied Finite Element Analysis. Larry J. Segerlind. John Wiley & Sons, Inc. 1976. 289-308 с.