Давлатов Ш.О.

Каршинский инженерно-экономический институт

Узбекистан, г.Карши

БИР ЎЛЧОВЛИ ФАЗОДА ЎЗГАРУВЧАН КОЭФФИЦИЕНТЛИ СИММЕТРИК Т-ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШ АЛГОРИТМИ

Аннотация. В этой статье исследована смешанная задача для симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами. В ней обоснована схема конечных элементов в случае равномерной сетки. Разработана программа расчета численного решения.

Ключевые слова: метод конечных элементов, алгоритм,смешанная задача, гиперболическая система, базисные функции, неявно-разностная схема.

Davlatov Sh.O.

Karshi Engineering and Economic Institute

Uzbekistan, Karshi

Abstract.In this paper we consider the mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems with variable coefficients. For the mixed problem we study the question justification scheme of finite elements in the case of a uniform grid. The results of numerical calculation of the model problem are given.

Keywords: finite element method,algorithm,mixed problem, hyperbolic system, basic functions, implicit difference scheme.

1. Масаланинг қўйилиши:

$G = \{(t, x) : t \in (0, T), \mathrm{x} \in \Omega\}$ соҳада

$$A(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u = F(x,t) \tag{1}$$

симметрик t-гиперболик системани

$$\begin{aligned} R_1(t)u(\ell_1,t) &= g_1(t) \\ R_2(t)u(\ell_2,t) &= g_2(t) \end{aligned} \tag{2}$$

чегаравий шартларни ва $t=0$ да

$$u(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega \tag{3}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин. (1)-(3) масаласи симметрик t-гиперболик система учун қўйилган аралаш масала деб номланади ([1]).

Бу ерда $\Omega = (\ell_1, \ell_2)$, A симметрик мусбат аниқланган матрица, B симметрик матрица, C ихтиёрий матрица, R_1, R_2-мос тўғрибурчакли ўзгарувчан матрица, g_1, g_2, ψ −берилган вектор функциялар . A, B, C - $M \times M$ ўлчамли ҳақиқий ўзгарувчан матрицалар , x,t эркли ўзгарувчилар,

$u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}$ x,t га боғлиқ ноъмалум вектор функция,

$F(x,t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$ x,t га боғлиқ берилган вектор функция.

2. Тавсия этиладиган усул ва унинг турғунлиги.

Агар $[\ell_1, \ell_2]$ кесмани N_x та тенг бўлакга бўлиб ($x_i = \ell_1 + hi$, $i = 0,\dots,N_x, h = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{N_x}$)

$u_h(t,x)$ яқинлашувчи ечимни $u_h(t,x) = \sum\limits_{i=0}^{Nx} u_i(t)\varphi_i(x)$ кўринишда изласак. Бу ерда $\varphi_i(x)$ базис функция, $u_i(t) = u(x_i,t) = \begin{pmatrix} u_{1i}(t) \\ u_{2i}(t) \\ \vdots \\ u_{Mi}(t) \end{pmatrix}$ вектор функция. Базис функция сифатида

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & \mathrm{x} \in (\mathrm{x}_0, x_1); \\ 0, & \mathrm{x} \notin (\mathrm{x}_0, x_1); \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i); \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}); \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}); \end{cases} \qquad i = 1,\dots,N_x - 1 \tag{4}$$

$$\varphi_N(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N-1}}{h}, & x\in(x_{N-1},x_N);\\ 0, & x\notin(x_{N-1},x_N)\end{cases}$$

функцияни оладиган бўлсак (1) система учун

$$\begin{gathered}A_i^{n+1}LU_i^{n+1}+B_i^{n+1}\xi U_i^{n+1}+C_i^{n+1}LU_i^{n+1}=\tau\cdot F_i^{n+1}+A_i^{n+1}LU_i^{n}\\ i=1,\ldots N_x-1\end{gathered}\tag{5}$$

айирмали схемалар системасини оламиз.

Бу ерда $U_i^n=u(x_i,t_n),\ F_i^n=F(x_i,t_n)$ вектор функцияларнинг $A_i^n=A(x_i,t_n),\ B_i^n=B(x_i,t_n),\ C_i^n=C(x_i,t_n)$ матрицаларнинг аппроксимацияси ва қуйидаги силжиш, ўрта, айирмали операторлар киритилган:

$$\psi^{\pm1}U_i^n=U_{i\pm1}^n$$

$$L=\frac{h}{6}\psi^{-1}+\frac{2}{3}h+\frac{h}{6}\psi^{+1}$$

$$\xi=\frac{\psi^{+1}-\psi^{-1}}{2}$$

чизиқли тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши учун

$x=\ell_1$ да

$$R_1(t_{n+1})U_0(t_{n+1})=g_1(t_{n+1})$$

(6)

$x=l_2$ да

$$R_2(t_{n+1})U_{N_x}(t_{n+1})=g_2(t_{n+1})$$

чегаравий шартлар

$$U_i(0)=\Psi(x_i)\quad i=\overline{0,N_x}\tag{7}$$

бошланғич шарт , $x=\ell_1$ ва $x=l_2$ да $u(x,t)$ вектор функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (1)- системанинг уларга мос келувчи тенгламалари аппроксимация қилинади. Шундай қилиб ёпиқ чизиқли тенгламалар системаси хосил қилинади.Бу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш мақсадга мувофиқрок[5].

Сонли аппроксимацион схемамизнинг тургунлигини исботлаш қулай бўлиши учун A матрицани бирлик матрица деб ҳисоблаймиз.Ω соҳани чекли,ички умумий нуқталарга эга бўлмаган элементларга(кесмаларга) бўламиз .Элементни(кесмани) K ҳарфи билан белгилаймиз.У холда $\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega} K$

$[0,T]$ кесмани N_t бўлакга бўламиз. $t_k = \tau \cdot k, (k = 0,..., N_t), \tau = \dfrac{T}{N_t}$

Сонли аппроксимацион схемамизнинг тургунлигини исботлаш

учун (1)-(3) аралаш масала ягона ечимга эга ва қуйидаги шартлар

$$(Du,u)_{\Gamma(\Omega)} = (Bu,u)_{x=\ell_2} - (Bu,u)_{x=\ell_1} \geq 0 \qquad (8)$$

$$C + C^* - \frac{\partial B}{\partial x} \geq 0 \qquad (9)$$

бажарилади деб фараз қиламиз. Бу ерда $D = nB$, n Ω сохага бирлик ташқи нормал,

I бирлик матрица.

Теорема.

Яқинлашувчи ечим $u_h \in P_n(K)$ K да бир қийматли аниқланган ва қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$u_h(t,x)_{\Omega}^{2} \leq e^T u_h(0,x)_{\Omega}^{2} + (T+1)(e^T - 1)F \qquad (10)$$

Бу ерда норма $u_{\Omega} = \int_{\Omega} u \cdot u$, $F = \max_{t \in [0,T]} F_h(t,x)_{\Omega}^{2}$

Ушбу теорема аппроксимацион ошкормас схемамизнинг (8) ва (9) шартлар бажарилганда турғун эканлигини кўрсатади.

Ушбу алгоритм асосида, Delphi-7 дастурлаш тилида, схема турғунлигини етарли шартлари бўлган (8) ва (9) шартларни текшириб шартлар бажарилмаган ҳолатда бажарилмаганлиги ҳақида маълумот берадиган ва (1)-(3) масалани сонли ечимини берадиган, фойдаланишга қулай, интерфейсли дастур яратилган.

3. Дастур ёрдамида олинган натижалар.

1-масала.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + (5-x)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 = (5-x)(2x+t) + t^2 + 2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - t\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - u_1 = 3t - x^2 - xt \end{cases}$$

Агар соха $\Omega = \{x : 0 < x < 2\}$ бўлиб

$t = 0$ да

$u_1 = x^2, u_2 = 2 - x$

чегаравий шарт

$x = 0$ да

$u_1 = u_2 - 2 - t^2$

$x = 2$ да

$u_2 = u_1 + t^2 - 2t - 4$.

$t > 0$ учун бундай аралаш масаланинг аниқ ечими

$$u_1 = x(t + x), u_2 = 2 - x + t^2$$

бўлади.

Текшириб кўриш қийин эмас берилган аралаш масалада теорема шартлари бажарилади.

Пастдаги жадвалда $u_\Omega = \int_\Omega u \cdot u$ нормада, x бўйича бўлаклар сони $N_x = 10$ ва $N_x = 20$ бўлганда, вақт бўйича бўлаклар сони N_t хар хил бўлганда, $t = 10$ даги аниқ ечим билан чекли элементлар усули орқали олинган ечим фарқи $u - v$ қандай бўлгани келтирилган. Бу ерда v чекли элементлар усули орқали олинган ечим .

N_t	$N_x = 10$	$N_x = 20$
50	6.3151753	6.3113112
100	0.4037771	0.4057528
200	0.2001872	0.2017784
400	0.7890118	0.7864681
800	0.3964902	0.3934927
1600	0.0366795	0.0249919
3200	0.0321308	0.0135450
6400	0.0609874	0.0503640

12800	0.0429027	0.0265836

Адабиётлар:

1. С. К. Годунов Уравнения математической физики. М.:Наука,1979,372с.
2. R. S. Falk and G. R. Richter. Explicit finite element methods for symmetric hyperbolic equations. SIAM J. NUMER. ANAL.Vol.36,No.3 pp. 935-952
3. K. O. Friedrichs,Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl.Math.,11 (1958), pp. 333-418.
4. С.К.Годунов, А.В.Забродин и др.Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.:Наука,1976. 75с.
5. L. J. Segerlind.Applied Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1976. 289-308 с.