Давлатов Ш.О.

Каршинский инженерно-экономический институт

Узбекистан, г.Карши

БИР ЎЛЧОВЛИ ФАЗОДА ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ СИММЕТРИК Т-ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШ АЛГОРИТМИ

Аннотация. В этой статье исследована смешанная задача для симметрических t-гиперболических систем с постоянными коэффициентами. В ней обоснована схема конечных элементов в случае равномерной сетки. Разработана программа расчета численного решения.

Ключевые слова: метод конечных элементов, алгоритм,смешанная задача, гиперболическая система, базисные функции, неявно-разностная схема.

Davlatov Sh.O.

Karshi Engineering and Economic Institute

Uzbekistan, Karshi

Abstract.In this paper we consider the mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients. For the mixed problem we study the question justification scheme of finite elements in the case of a uniform grid. The results of numerical calculation of the model problem are given.

Keywords: finite element method,algorithm,mixed problem, hyperbolic system, basic functions, implicit difference scheme.

1. Масаланинг қўйилиши:

$G = \{(t, x) : t \in (0, T), \mathrm{x} \in \Omega\}$ сохада

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Cu=F(x,t) \tag{1}$$

симметрик t-гиперболик системани

$$\begin{aligned} R_1(t)u(\ell_1,t)&=g_1(t)\\ R_2(t)u(\ell_2,t)&=g_2(t) \end{aligned} \tag{2}$$

чегаравий шартларни ва $t=0$ да

$$u(x,0)=\psi(x),\quad x\in\Omega \tag{3}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин. (1)-(3) масаласи симметрик t-гиперболик система учун қўйилган аралаш масала деб номланади ([1]).

Бу ерда $\Omega=(\ell_1,\ell_2)$, A симметрик мусбат аниқланган матрица, B симметрик матрица, C ихтиёрий матрица, R_1,R_2-мос тўғрибурчакли ўзгарувчан матрица, $g_1,g_2,\psi-$берилган вектор функциялар . A,B,C - $M\times M$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас матрицалар , x,t эркли ўзгарувчилар,

$u(x,t)=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\\u_M\end{pmatrix}$ x,t га боғлиқ ноъмалум вектор функция, $F(x,t)=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\ \vdots\\f_M\end{pmatrix}$ x,t га боғлиқ берилган вектор функция.

2. Тавсия этиладиган усул ва унинг турғунлиги.

Агар $[\ell_1,\ell_2]$ кесмани N_x та тенг бўлакга бўлиб ($x_i=\ell_1+hi$, $i=0,...,N_x, h=\dfrac{\ell_2-\ell_1}{N_x}$)

$u_h(t,x)$ яқинлашувчи ечимни $u_h(t,x)=\sum\limits_{i=0}^{Nx}u_i(t)\varphi_i(x)$ кўринишда изласак. Бу ерда $\varphi_i(x)$ базис функция, $u_i(t)=u(x_i,t)=\begin{pmatrix}u_{1i}(t)\\u_{2i}(t)\\ \vdots\\u_{Mi}(t)\end{pmatrix}$ вектор функция. Базис функция сифатида

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h}, & x\in(x_0,x_1);\\ 0, & x\notin(x_0,x_1);\end{cases}$$

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h}, & x\in(x_{i-1},x_i);\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h}, & x\in(x_i,x_{i+1});\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_{i+1});\end{cases}\qquad i=1,...,N_x-1 \tag{4}$$

$$\varphi_N(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N-1}}{h}, & x\in(x_{N-1},x_N);\\ 0, & x\notin(x_{N-1},x_N)\end{cases}$$

функцияни оладиган бўлсак (1) система учун

$$
\begin{aligned}
&ALU_i^{n+1}+B\xi U_i^{n+1}+CLU_i^{n+1}=\tau\cdot F_i^{n+1}+ALU_i^{n} \\
&i=1,\ldots N_x-1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

айирмали схемалар системасини оламиз.

Бу ерда $U_i^n=u(x_i,\mathrm{t_n}),\ \mathrm{F_i^n}=F(x_i,\mathrm{t_n})$ вектор функцияларнинг аппроксимацияси ва қуйидаги силжиш, ўрта, айирмали операторлар киритилган:

$$\psi^{\pm1}U_i^n=U_{i\pm1}^n$$

$$L=\frac{h}{6}\psi^{-1}+\frac{2}{3}h+\frac{h}{6}\psi^{+1}$$

$$\xi=\frac{\psi^{+1}-\psi^{-1}}{2}$$

чизиқли тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши учун

$x=\ell_1$ да

$$R_1(t_{n+1})U_0(t_{n+1})=g_1(t_{n+1})$$

(6)

$x=l_2$ да

$$R_2(t_{n+1})U_{N_x}(t_{n+1})=g_2(t_{n+1})$$

чегаравий шартлар

$$U_i(0)=\Psi(x_i)\quad \mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{N_x}} \tag{7}$$

бошланғич шарт , $x=\ell_1$ ва $x=l_2$ да $u(x,t)$ вектор функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (1)- системанинг уларга мос келувчи тенгламалари аппроксимация қилинади. Шундай қилиб ёпиқ чизиқли тенгламалар системаси хосил қилинади.Бу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш мақсадга мувофиқрок[5].

Сонли аппроксимацион схемамизнинг тургунлигини исботлаш қулай бўлиши учун A матрицани бирлик матрица деб ҳисоблаймиз.Ω соҳани чекли,ички умумий нуқталарга эга бўлмаган элементларга(кесмаларга) бўламиз .Элементни(кесмани) K ҳарфи билан белгилаймиз.У холда $\Omega=\bigcup\limits_{K\subset\Omega}K$

$[0,T]$ кесмани N_t бўлакга бўламиз. $t_k=\tau\cdot k,(k=0,\ldots,N_t),\tau=\dfrac{T}{N_t}$

Сонли аппроксимацион схемамизнинг тургунлигини исботлаш учун (1)-(3) аралаш масала ягона ечимга эга ва қуйидаги шартлар

$$(Du,u)_{\Gamma(\Omega)} = (Bu,u)_{x=\ell_2} - (Bu,u)_{x=\ell_1} \geq 0 \tag{8}$$

$$C + C^* \geq 0 \tag{9}$$

бажарилади деб фараз қиламиз[2]-[4]. Бу ерда $D = nB$, n Ω сохага бирлик ташқи нормал, I бирлик матрица.

Теорема.

Яқинлашувчи ечим $u_h \in P_n(K)$ K да бир қийматли аниқланган ва қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\|u_h(t,x)\|_{\Omega}^2 \leq e^T \|u_h(0,x)\|_{\Omega}^2 + (T+1)(e^T - 1)F \tag{10}$$

Бу ерда норма $\|u\|_{\Omega} = \int_{\Omega} u \cdot u$, $F = \max_{t \in [0,T]} \|F_h(t,x)\|_{\Omega}^2$

Ушбу теорема аппроксимацион ошкормас схемамизнинг (8) ва (9) шартлар бажарилганда турғун эканлигини кўрсатади.

Ушбу алгоритм асосида, Delphi-7 дастурлаш тилида, схема турғунлигини етарли шартлари бўлган (8) ва (9) шартларни текшириб шартлар бажарилмаган ҳолатда бажарилмаганлиги ҳақида маълумот берадиган ва (1)-(3) масалани сонли ечимини берадиган, фойдаланишга қулай, интерфейсли дастур яратилган.

3. Дастур ёрдамида олинган натижалар .

1-масала.

$\Omega \subset R^1$ соҳада сўнувчи тўлқин тенламаси

$w_{tt} + \beta w_t - w_{xx} = \phi, \beta \geq 0$

$t = 0$ да w, w_t берилган

$\Gamma(\Omega)$ да $w = 0$

$u_1 = w_x, u_2 = w_t$ белгилашлар киритиб қуйидаги системани оламиз

$$u_t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Бу масалада

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -n_1 \\ -n_1 & 0 \end{pmatrix}$$ бўлади,

Агар соха $\Omega = \{x : 0 < x < 2\pi\}$, $\beta = 1$ ва $\phi = \quad 2\sin x \cos \quad 2t - \sin x \sin \quad 2t$

Бўлиб $t = 0$ да $u_1 = 0, u_2 = \quad 2\sin x$

$x = 0$ ва $x = 2\pi$ да чегаравий шарт $u_2 = 0$.

$t > 0$ учун бундай аралаш масаланинг аниқ ечими

$$u_1 = \cos x \sin \quad 2t, u_2 = \quad 2\sin x \cos \quad 2t$$

бўлади.

Текшириб кўриш қийин эмас берилган аралаш масалада теорема шартлари бажарилади.

Пастдаги жадвалда $u_{\Omega} = \int_{\Omega} u \cdot u$ нормада, x бўйича бўлаклар сони $N_x = 10$ ва $N_x = 20$ бўлганда, вақт бўйича бўлаклар сони N_t хар хил бўлганда, $t = 10$ даги аниқ ечим билан чекли элементлар усули орқали олинган ечим фарқи $u - v$ қандай бўлгани келтирилган. Бу ерда v чекли элементлар усули орқали олинган ечим .

N_t	$N_x = 10$	$N_x = 20$
10	1.4727946	1.4809423
20	0.8696831	0.9004951
30	0.6106927	0.6495351
40	0.4648763	0.5072824
50	0.3713381	0.4152946
100	0.1727490	0.2133765
200	0.0872766	0.1022803
250	0.0797011	0.0794215
300	0.0784801	0.0642277
600	0.0898479	0.0288687
1200	0.1018759	0.0201977

Адабиётлар:

1. С. К. Годунов Уравнения математической физики. М.:Наука,1979,372с.
2. R. S. Falk and G. R. Richter. Explicit finite element methods for symmetric hyperbolic equations. SIAM J. NUMER. ANAL.Vol.36,No.3 pp. 935-952
3. K. O. Friedrichs,Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl.Math.,11 (1958), pp. 333-418.
4. С.К.Годунов, А.В.Забродин и др.Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.:Наука,1976. 75с.
5. L. J. Segerlind.Applied Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1976. 289-308 с.