Давлатов Ш.О.

Каршинский инженерно-экономический институт

Узбекистан, г.Карши

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ T-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

Аннотация. В этом статье рассмотрен метод конечных элементов для симметрических t-гиперболических систем. Создан алгоритм численного решения смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем методом конечных элементов на нерегулярной сетке. На основе этого алгоритма создана программа для численного решения смешанной задачи для симметрических t-гиперболических систем. Приведен численный расчет модельной задачи.

Ключевые слова: метод конечных элементов,алгоритм,смешанная задача,гиперболическая система, базисные функции, неявно-разностная схема.

Davlatov Sh.O.

Karshi Engineering and Economic Institute

Uzbekistan, Karshi

Abstract. This article discusses the finite element method for symmetric t-hyperbolic systems. Created an algorithm for a numerical solution of a mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems by finite elements on an irregular grid. Based on this algorithm, a program has been created for a numerical solution of a mixed problem for symmetric t-hyperbolic systems. The numerical calculation of the model problem is given.

Keywords: finite element method, hyperbolic system, basic functions, implicit difference scheme.

1. Постановка задачи

В области $\Omega_T \equiv \Omega \times (0,T)$ рассматривается смешанная задача для симметрической t-гиперболической системы

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu = F \, , \tag{1}$$

с граничными условиями на $\Gamma(\Omega) \times [0,T]$:

$$(D - N)u = 0 \tag{2}$$

И с начальными данными при $t=0$

$$u\big|_{t=0} = g(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $x=(x_1,x_2,...,x_N)$ точка в пространстве R^N, Ω ограниченный область в R^N, $\Gamma(\Omega)$ - граница области Ω, $A_i(t,x)$, $i=\overline{1,N}$ симметрические матрицы размерностью $m\times m$, элементы которых функции из $C([0,T])\times C^1(\Omega)$, $B(t,x)$ матрица $m\times m$, элементы которого функции из $C(\Omega_T)$, $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_m(t,x))^T$ неизвестная вектор функция, $F(t,x)=(f_1(t,x),f_2(t,x),...,f_m(t,x))^T$, $f_i(t,x)\in C(\Omega_T)$, $i=\overline{1,m}$, $g(x)=(g_1(x),g_2(x),...,g_m(x))^T$, $g_i(x)\in C(\Omega)$, $i=\overline{1,m}$ вектор функции . $D=\sum_{i=1}^{N} n_i A_i$, $n=(n_1,...,n_N)$ внешний нормаль на границу области Ω. $N(t,x)$ матрица $m\times m$, удовлетворяющая условию $N+N^*\geq 0$ и элементы которого непрерывные функции.

В Фридрихе[1] показана, что (1)-(3) смешанная задача при достаточных гладких условиях и следующих дополнительных предположениях

$$B+B^* - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \geq \sigma I, \qquad \sigma>0,$$

$$\ker(D-N)+\ker(D+N)=R^m \text{ на } \Gamma(\Omega)\times[0,T]$$

имеет единственное решение. Здесь I единичная матрица.

2 Схема конечных элементов и ее устойчивость

Отрезок $[0,T]$ разобъем на N_t частей

$$t_n = \tau\cdot n, (n=0,...,N_t), \tau = \frac{T}{N_t}.$$

Проведем прямые $x=x_i=h_x i$ $(i=0,...,N_x, h_x=\dfrac{l_x}{N_x})$, $y=y_j=h_y j$ $(j=0,...,N_y, h_y=\dfrac{l_y}{N_y})$. Пересечение прямых $x=x_i$ и $y=y_j$, называемый узлом сетки, обозначим через $M_{ij}=M(x_i;y_j)$.

Сетка разбивает прямоугольный область Ω на части (элементы). Каждый элемент прямоугольник. Элементы, один из вершин которых, является узел M_{ij} называются элементами этого узла. Объединение этих узлов обозначим через Ω_{ij}.

Будем искать приближенное решение $u_h(t_n,x,y)$ на каждом слое t_n по времени в виде

$$u_h^n = u_h(t_n,x,y) = \sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y} u_{ij}(t_n)\cdot Q_{ij}(x,y), \tag{4}$$

где $Q_{ij}(x,y)$ базисные функции,

$$u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n) = \left(u_{1ij}(t_n), u_{2ij}(t_n), \ldots, u_{Mij}(t_n)\right)^T = \left(u_{1ij}^n, u_{2ij}^n, \ldots, u_{Mij}^n\right)^T.$$

Аппроксимируем систему (4) в узле M_{ij} т.е. в системе (4) производную по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимируем отношением $\frac{u(t+\tau,x,y)-u(t,x,y)}{\tau}$, вместо $u(t,x,y)$ подставим $u_h(t_n,x,y)$, каждое уравнение полученной системы умножим на $Q_{ij}(x,y)$ и проинтегрируем по Ω_{ij}. В итоге получим неявную разностную схему:

$$\left(u_h^{n+1}, Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}} + \tau\left(A\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}, Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}} + \tau\left(B\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial y}, Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}} + \tau\left(Cu_h^{n+1}, Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}} =$$
$$= \tau\left(F_h^{n+1}, Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}} + \left(u_h^n, Q_{ij}\right)_{\Omega_{ij}} \quad (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_h. \qquad (5)$$

где $(u,v)_{\Omega_{ij}} = \iint\limits_{\Omega_{ij}} u(x,y)\cdot v(x,y)\,d\Omega_{ij}$.

В качестве примера базисной функции берем следующие функции $Q_{ij}(x,y) = \phi_i(x)\cdot\psi_j(y)$, где

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{xi}}, & x \in (x_{i-1}, x_i); \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{xi+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}); \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}); \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N_x - 1$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_{x1}}, & x \in (x_0, x_1); \\ 0, & x \notin (x_0, x_1); \end{cases} \qquad \varphi_{N_x}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N_x-1}}{h_{xN_x}}, & x \in (x_{N_x-1}, x_{N_x}); \\ 0, & x \notin (x_{N_x-1}, x_{N_x}); \end{cases}$$

$$\psi_j(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j-1}}{h_{yj}}, & y\in\left(y_{j\text{-}1},y_j\right);\\ \dfrac{y_{j+1}-y}{h_{yj+1}}, & y\in\left(y_j,y_{j+1}\right);\\ 0, & y\notin\left(y_{j\text{-}1},y_{j+1}\right);\end{cases}\qquad j=1,\ldots,N_y\text{ -}1$$

$$\psi_0(y)=\begin{cases}\dfrac{y_1-y}{h_{y1}}, & y\in\left(y_0,y_1\right);\\ 0, & y\notin\left(y_0,y_1\right);\end{cases}\qquad \psi_{N_y}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{N_y-1}}{h_{yN_y}}, & y\in\left(y_{N_y\text{-}1},y_{N_y}\right);\\ 0, & y\notin\left(y_{N_y\text{-}1},y_{N_y}\right);\end{cases}$$

тогда после некоторых несложных вычислений из (5), получим следующую разностную схему для системы (4) в узле $M_{ij}=M(x_i;y_j)\in\Omega_h$, $(i=1,\ldots,N_x-1,\ j=1,\ldots,N_y-1)$:

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\alpha_{1ks}\cdot u_{sij}^{n+1}+\alpha_{2ks}\cdot u_{si+1\,j}^{n+1}+\alpha_{3ks}\cdot u_{si+1\,j+1}^{n+1}+\alpha_{4ks}\cdot u_{sij+1}^{n+1}+\alpha_{5ks}\cdot u_{si-1\,j+1}^{n+1}+\\ +\alpha_{6ks}\cdot u_{si-1\,j}^{n+1}+\alpha_{7ks}\cdot u_{si-1\,j-1}^{n+1}+\alpha_{8ks}\cdot u_{sij-1}^{n+1}+\alpha_{9ks}\cdot u_{si+1\,j-1}^{n+1}\end{array}\right]=f_{kij}^{n+1}+$$
$$\sum_{s=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\delta_{ks}}{\tau}\cdot\Big(\dfrac{4}{9}u_{sij}^{n}+\dfrac{1}{9}(u_{si+1\,j}^{n}+u_{sij+1}^{n}+u_{si-1\,j}^{n}+u_{sij-1}^{n})+\dfrac{1}{36}(u_{si+1\,j+1}^{n}+\\ +u_{si-1\,j+1}^{n}+u_{si-1\,j-1}^{n}+u_{si+1\,j-1}^{n}))\end{array}\right], \tag{6}$$
$$k=1,\ldots,M.$$

Здесь $\delta_{ks}=\begin{cases}1\ \textit{если}\ k=s\\ 0\ \textit{если}\ k\neq s\end{cases}$,

$$\alpha_{1ks}=\frac{4}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{h_{xi}}-\frac{1}{h_{xi+1}})a_{ks}+\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{h_{yj}}-\frac{1}{h_{yj+1}})b_{ks},$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{ks}}{h_{xi+1}}+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{yj}}-\frac{1}{h_{yj+1}})b_{ks},$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi+1}}+\frac{b_{ks}}{h_{yj+1}}),$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{xi}}-\frac{1}{h_{xi+1}})a_{ks}+\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_{yj+1}},$$

$$\alpha_{5ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi}}-\frac{b_{ks}}{h_{yj+1}}),$$

$$\alpha_{6ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})-\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{ks}}{h_{xi}}+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{yj}}-\frac{1}{h_{yj+1}})b_{ks},$$

$$\alpha_{7ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi}}+\frac{b_{ks}}{h_{yj}}),$$

$$\alpha_{8ks}=\frac{1}{9}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{h_{xi}}-\frac{1}{h_{xi+1}})a_{ks}-\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_{y}},$$

$$\alpha_{9ks}=\frac{1}{36}\cdot(c_{ks}+\frac{\delta_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{a_{ks}}{h_{xi+1}}-\frac{b_{ks}}{h_{yj}}).$$

Для того чтобы замкнуть систему линейных алгебраических уравнений (6) воспользуемся аппроксимациями граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned}&(D-N)u(t_{n+1},x,y_j)\big|_{x=0}=0\\&(D-N)u(t_{n+1},x,y_j)\big|_{x=l_x}=0\\&(D-N)u(t_{n+1},x_i,y)\big|_{y=0}=0\\&(D-N)u(t_{n+1},x_i,y)\big|_{y=l_y}=0\end{aligned}\tag{7}$$

при $t=0$:

$$u\left(0,x_i,y_j\right)=u_0\left(x_i,y_j\right),\quad M(x_i,y_j)\in\overline{\Omega}_h.\tag{8}$$

В качестве дополнительных граничных условий (неопределенных дифференциальной постановкой смешанной задачи) используется аппроксимация исходной системы. В итоге получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. СЛАУ решим методом главных элементов.

Разобьем область Ω на конечное число элементов(выпуклые многоугольники),не имеющих общих внутренних точек. Обозначим элемент через K. Тогда имеем $\Omega = \bigcup\limits_{K \subset \Omega} K$. Отрезок $[0,T]$ делим на N_t частей. Точки разбиения обозначим через $t_k = \tau \cdot k, (k = 0,\dots,N_t), \tau = \dfrac{T}{N_t}$.

Предположим, что выполняются следующее условии:

$$N + N^* \geq 0, \tag{9}$$

$$B + B^* - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \geq 0. \tag{10}$$

При таких предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема. *При выполнение условий (9)-(10)* решение $u_h \in (P_l(K))^m$ *однозначно определено на* K *и удовлетворяет неравенство*

$$\|u_h(t,x)\|_\Omega^2 \leq e^T \|u_h(0,x)\|_\Omega^2 + (T+1)(e^T - 1)F.$$

Здесь $\|u\|_\Omega = \sqrt{\int_\Omega u \cdot u}, \quad F = \max\limits_{t \in [0,T]} \|F_h(t,x)\|_\Omega^2$.

Нерегулярная сетка создается следующим образом. Область Ω разбиваем выше указанным способом на несколько частей. Это является первоначальной “грубой” сеткой. На этой сетке находим численное решение задачи (6)-(8). После нахождения решения, если модуль разности значений , хотя бы одной компоненты вектор-функции $u_h(x,t)$, в узлах между M_{ij} , M_{i+1j} или в узлах между M_{ij} ,M_{ij+1} больше заданного число $\delta > 0$, то середину этих узлов ставим новый узел. Создаем первую нерегулярную сетку. На этой сетке повторна находим численное решение задачи (6)-(8). Аналогично выше указанным способом создаем следующую нерегулярную сетку. Этот процесс будем повторять пока не будет выпольнятся неравенства $|u_{ki+1j} - u_{kij}| \leq \delta$ и $|u_{kij+1} - u_{kij}| \leq \delta \quad (k = 1,\dots,M)$.

3 Численные расчеты

Задача. В области $G = \{(t,x,y) : t \in (0,T),\ (x,y) \in \Omega\}$ дано уравнение затухающий волны

$$w_{tt} + \beta w_t - w_{xx} - w_{yy} = \varphi, \beta \geq 0$$

$$w, w_t \text{ заданы при } t = 0$$

$$w = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Вводя обозначении $u_1 = w_x, u_2 = w_y, u_3 = w_t$ получим следующую систему

$$u_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} u_y + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

В этом задаче

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0-n_1 \\ 0 & 0-n_2 \\ -n_1 & -n_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если взять

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_2 \\ -n_1 & -n_2 & 2 \end{pmatrix}$$

то тогда

$$D-N=2\begin{pmatrix} 0\,0-n_1 \\ 0\,0-n_2 \\ 0\,0-1 \end{pmatrix}, D+N=2\begin{pmatrix} 0 & 0-n_1 \\ 0 & 0-n_2 \\ -n_1-n_2 & 1 \end{pmatrix}, N+N^*=\begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,4 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Omega=\{(x,y):0<x<2\pi, 0<y<2\pi\}$.

Возмем $\beta=1$ и $\varphi=\sqrt{2}\sin x\sin y\cos\sqrt{2}t$

начальные условии при $t=0$

$$u_1=0, u_2=0, u_3=\sqrt{2}\sin x\sin y$$

условие на границе

$$(D-N)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\Big|_{\partial\Omega}=2\begin{pmatrix} 0\,0-n_1 \\ 0\,0-n_2 \\ 0\,0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\Big|_{\partial\Omega}=2\begin{pmatrix} -n_1u_3 \\ -n_2u_3 \\ -u_3 \end{pmatrix}\Big|_{\partial\Omega}=0,$$

Из этого следует, что на всей стороне прямоугольника

$$u_3=0.$$

При $t>0$ точное решение смешанной задачи будет

$$u_1=\cos x\sin y\sin\sqrt{2}t, u_2=\sin x\cos y\sin\sqrt{2}t,$$

$$u_3=\sqrt{2}\sin x\sin y\cos\sqrt{2}t.$$

В таблице ниже приведены значения разницы $\|u-v\|_{L^2(\Omega)}$ на неравномерной сетке при различных разбиениях по времени t и первоначальном разбиении $N_x=3, N_y=3$ по x и по y соответственно, при $\delta=0,2$ и при $t=15$.

N_t	N_x	N_y	$\|u-v\|_{L^2(\Omega)}$
10	13	13	0.4603349
20	13	13	0.2622136
40	13	13	0.1154079
80	13	13	0.0228676

160	13	13	0.0220265

Литература

[1] K. O. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math.,11 (1958), pp. 333–418.

[2]. L. J. Segerlind.Applied Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1976.pp. 289-308.

[3] R.D. Aloev, Z.K. Eshkuvatov, Sh.O. Davlatov, N.M.A. NikLong. Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric T-hyperbolic systems with constant coefficients. Computers and Mathematics with Applications. USA.68(2014) pp. 1194-1204. (Scopus. IF=3.37)